新しい演算子法と差分方程式(函数方程式とその応用)

早原, 四朗; 近藤, 修三

数理解析研究所講究録
499巻 1983年 153-161

新しい演算子法と差分方程式

岡山理大　早原四朗　(Sirō Hayabara)
岡山理大　近藤修三　(Shūzō Kondō)

ここでは，新しい演算子法N.O.M.(New Operator Methods)を紹介する．この新しい方法を用いて定数係数の差分方程式(例1)を解く．さらに，代数的微分，積分について述べる．新しい代数的対数関数を導入し，変数係数の差分方程式(例2)を解く．

§1. N.O.M. (New Operator Methods)

一次元無限数列 $\{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$ を代表元 a_n を用いて $\{a_n\}$で表す．$\{a_n\}$と$\{b_n\}$の和とコーシー積を

$$\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\},\quad \{a_n\}\cdot\{b_n\}=\{\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r}\}$$

と定める．$\{a_n\}$, $\{b_n\} \neq \{0\}$ に対して，コーシー積

$$\{x_n\}\cdot\{b_n\}=\{a_n\}$$

の逆算としてコーシー商

$$\{x_n\}=\{a_n\}/\{b_n\}$$

は，数列になる場合とならない場合がある．いずれの場合も順序対 $\{a_m\}/\{b_m\}$ を演算子とよぶ．一次元数列全体の集合Eを数列空間，演算子全体の集合Qを演算子空間とよぶ．

2つの演算子 a/b と c/d は

$$a\cdot d = b\cdot c$$

で，かつそれに限るとき，2つは同値であるといい

$$a/b = c/d$$

で表す．演算子の和，差，積，商はつぎの通り定義する．

$$\text{I)}.\ (a/b)\pm(c/d) = (a\cdot d \pm b\cdot c)/(b\cdot d)$$

$$\text{II)}.\ (a/b)(c/d) = (a\cdot c)/(b\cdot d)$$

$$\text{III)}\ (a/b)/(c/d) = (a\cdot d)/(b\cdot c),\ (c \neq \{0\})$$

よく用いる演算子として数値演算子と変位演算子などがある．

数値演算子 $[a] = \{a, 0, \cdots, 0, \cdots\}$ に対して

$$[a]\cdot\{b_m\} = \{ab_0, ab_1, \cdots, ab_m, \cdots\}.$$

変位演算子 $u = \{0, 1, 0, \cdots, 0, \cdots\}$ に対して

$$u\cdot\{b_m\} = \{0, a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}, \cdots\}.$$

$$u^k = \{\overbrace{0, \cdots, 0}^{k\text{コ}}, 1, 0, \cdots\}$$

$$u^k\cdot\{b_m\} = \{\overbrace{0, \cdots, 0}^{k\text{コ}}, a_0, a_1, \cdots, a_{m-k}, \cdots\}.$$

数列 $\{a_m\}$ は変位演算子 u を用いて

$$\{a_n\} = a_0[1] + a_1 u + \cdots + a_n u^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$$

で表される．右辺を u の関数 $a_n(u)$ で表せば

$$a_n(u)\, b_n(u) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r}\right) u^n$$
$$= \left\{\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r}\right\}$$
$$= \{a_n\}\cdot\{b_n\}\ .$$

このことからＥにおけるコーシー積はＱにおける普通積に対応している．これがN.O.M.の原理である．

n 項がそれぞれ a_n, a_{n+1}, a_{n+2} である数列 $\{a_n\}$, $\{a_{n+1}\}$, $\{a_{n+2}\}$ を｛ ｝を外して a_n, a_{n+1}, a_{n+2} と略記すれば n 成分について

$$a_n = u\, a_{n+1} + [a_0]$$
$$= u^2 a_{n+2} + u[a_1] + [a_0]\ .$$

これから演算子 $p = 1/u$ に関して次の公式Ｉ，II を得る．

公式Ｉ（Ｅ→Ｑ）

$$a_{n+1} = p\,a_n - p[a_0]$$

$$a_{n+2} = p^2 a_n - p^2[a_0] - p[a_1]$$

公式II（Ｑ→Ｅ）

$$p/(p-\alpha) = \{\alpha^n\} \qquad (\alpha\,;\ 定数)$$

$$p/(p-\alpha)^{k+1} = \begin{cases} \binom{n}{k}\alpha^{n-k} & (k \leq n) \\ 0 & (n < k) \end{cases}\ .$$

例1． $f(x+2)-5f(x+1)+6f(x)=0$ $\cdots(1)$

をみたす $f(x)$ を求める．

解） x の整数部 $[x]=n$ とおき，区分的に定数である関数

$$f(x)=f_n \quad (n \leq x < n+1,\ n=0,1,\cdots)$$

を考えると，$f(x)$ の全体の x 空間と f_n 全体の E 空間のそれぞれの元が1対1に対応する．よって(1)は

$$f_{n+2}-5f_{n+1}+6f_n=0$$

に対応する．この方程式を Q に移すと

$$p^2f_n-p^2[f_0]-p[f_1]-5(pf_n-p[f_0])+6f_n=0,$$

$$f_n=(3[f_0]-[f_1])\frac{p}{p-2}-(2[f_0]-[f_1])\frac{p}{p-3}.$$

E に戻して

$$f_n=(3f_0-f_1)2^n-(2f_0-f_1)3^n.$$

2^n と 3^n は一次独立だから一般解は

$$f_n=c_1 2^n+c_2 3^n.$$

もとの x の関数空間に戻せば

$$f(x)=c_1 2^x+c_2 3^x.$$

§2. 代数的微分，積分と差分方程式

nx_n は数列空間 E においてコーシー積ではないので直ちに演算子空間 Q の元では表せない．よってつぎの演算 D を導入して利用する．

定義1．数列空間Eにおいて

$$D\{a_n\}=\{-n a_n\}\quad \text{つまり}$$

$$D\{a_n\}=\{0,-a_1,-2a_2,\cdots,-n a_n,\cdots\}$$

となるDは一種の微分法の作用をもつから代数的微分という.

定理1．Eにおいて

$$D\{a_n+b_n\}=D\{a_n\}+D\{b_n\}$$

$$D(\{a_n\}\cdot\{b_n\})=(D\{a_n\})\cdot\{b_n\}+\{a_n\}\cdot(D\{b_n\}).$$

紛れがなければ以下では $\{a_n\}=a_n$ と略記する.

定義2．演算子に対する演算Dはつぎのように定義する.

$$D(a_n/b_n)=[(Da_n)\cdot b_n-a_n\cdot(Db_n)]/(b_n\cdot b_n),\ (b_n\neq\{0\})$$

定理2．Qにおいて

$$D(a_n/b_n+c_n/d_n)=D(a_n/b_n)+D(c_n/d_n)$$

$$D[(a_n/b_n)(c_n/d_n)]=[D(a_n/b_n)](c_n/d_n)+(a_n/b_n)[D(c_n/d_n)]$$

$D[\alpha]=0$ ，（$[\alpha]$ は数値演算子）.

定理3．

i）Eにおいて　$Dx^{\cdot r}=rx^{\cdot(r-1)}\cdot(Dx)$,

Qにおいて　$Dx^r=rx^{r-1}(Dx)$

（r は正整数，$x^{\cdot r}=\overbrace{x\cdot x\cdot\cdots\cdot x}^{r\text{コ}}$.）

ii）変位演算子 u および $p=[1]/u$ に対して，Qにおいて

$Du=-u$，$Du^r=-ru^r$，$D^k u^r=(-r)^k u^r$　$\left(\begin{array}{l}k;\text{正整数}\\ r;\text{正,負の整数}\end{array}\right)$

$Dp=p$，$Dp^r=rp^r$，$D^k p^r=r^k p^r$.

定義3. Eにおいて

$$\exp\{a_n\} = e^{\{a_n\}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\{a_n\}^{\cdot r}}{r!}$$

を指数関数列という.

定理4.

i) Eにおいて $e^{\{a_n\}} \cdot e^{\{b_n\}} = e^{\{a_n+b_n\}}$

ii) Qにおいて $De^{\{a_n\}} = e^{\{a_n\}}(D\{a_n\})$.

べき級数 $\sum_{r=0}^{\infty} a_r s^r$ の係数の作る数列は $\{a_n\}$ であるからこのべき級数の表す関数を数列 $\{a_n\}$ の母関数という. ここに s は実数でも複素数でもよい. 実際電子工学の理論に用いられるZ変換では $s = z$ (複素数) である. 数列 $\{a_n\} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r u^r$ であるから $\{a_n\}$ の演算子表示を $a_n(p)$ とすればこれは $\{a_n\}$ の母関数である. ゆえにこれまでの u または p をEに関係なくQにおいては実数の領域に拡張して考えてもよい. (例えば p^{α}, $\log p$ 等).

定義4. 与えられた $x \in Q$ に対して

$$Dy = x$$

である演算子 $y \in Q$ が存在すれば, y を x の代数的積分といい,

$$y = \int x + [C]$$

で表す.

定義5. 拡張した領域の整関数 $g(x)$ に対して

$$D\log f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}(Dx)=g(x)$$

となる $\log f(x)$ が存在する。これを代数的対数関数といい

$$\log f(x)=\int g(x)+[C]=\int g(x)(Dx)^{-1}dx+[C]$$

で表す。

定理5．Qにおいてつぎの等式がなりたつ。($a_n=\{a_n\}$)．

1) $\log(a_n b_n)=\log a_n+\log b_n$， $\log a_n^r=r\log a_n$

2) $D\log a_n=(Da_n)/a_n$

3) $D\log u^r=-r$ ， $D\log p^r=r$

$D\log(u-\alpha)^r=-ru/(u-\alpha)$

$D\log(p-\alpha)^r=rp/(p-\alpha)$ （α, r；実数）．

4) 一般に $f(u)$, $f(p)$ がそれぞれ u または p に関して普通の意味で微分可能ならば，

$$Df(u)=-f'(u)u=-\frac{df}{du}u$$

$$Df(p)=f'(p)p=\frac{df}{dp}p\ .$$

定理6．積分定数を略して次の公式がなりたつ．

$$\int(Df)g=fg-\int f(Dg)$$

$$\int f'(u)u=-f(u),\ \int f'(p)p=f(p)$$

$$\int[\alpha]=-[\alpha]\log u=[\alpha]\log p$$

$$\int \frac{p}{p-\alpha} = \log(p-\alpha)$$

$$\int \frac{p}{(p-\alpha)^{k+1}} = -k^{-1}(p-\alpha)^{-k}.$$

例2. 差分方程式

$$a(x+1)f(x) - xf(x+1) = a^{x+1}, \quad f(0)=1, \quad (a;\text{定数}) \qquad ①$$

をみたす $f(x)$ の一般式を求めよ。

解) $[x]=n$ とおくと，①に対応する数列方程式は

$$a(n+1)f_n - nf_{n+1} = a^{n+1} \qquad ②$$

$$-nf_n = Df_n, \quad f_{n+1} = pf_n - p, \quad a^n = p/(p-a) \quad \text{により}$$

$$a(-Df_n) + af_n + D(pf_n - p) = ap/(p-a)$$

$$Df_n + (p+a)(p-a)^{-1}f_n = p(p-a)^{-1} + ap(p-a)^{-2}. \qquad ③$$

③に関する同次方程式

$$Df_n + (p+a)(p-a)^{-1}f_n = 0 \qquad ④$$

に対して

$$Df_n/f_n = -(p+a)(p-a)^{-1} = 1 - 2p(p-a)^{-1}.$$

代数的積分して

$$\log f = \log p - 2\log(p-a) + c.$$

$$\tilde{f} = cp(p-a)^{-2} \qquad ⑤$$

③に対する特解は

$$f_p = \tilde{f}\int \tilde{f}^{-1}\left[p(p-a)^{-1} + ap(p-a)^{-2}\right]$$

$$= p(p-a)^{-2}\int p$$
$$= p^2(p-a)^{-2}$$
$$= p(p-a)^{-1} + ap(p-a)^{-2}. \qquad ⑥$$

⑤，⑥によりEにおける②の一般解は

$$f_n = cna^{n-1} + (n+1)a^n.$$

対応する①の一般解は

$$f(x) = cxa^{x-1} + (x+1)a^x.$$

$c=-a$とおけば①の特解 $f(x)=a^x$ を得る。

同様に，2階以上の代数的常微分方程式や偏微分方程式が解ける。

参考文献

[1] 早原四朗，春木茂，新しい演算子法と離散解析関数論，槙書店（1981）.

[2] S. Hayabara, Z-Transformation by the New Operator Methods, Proc. Japan Acad. 58A(1982)182-185.

[3] S. Hayabara, Algebraic Derivative, Integral and Difference Equations (in Japanese), Bull. Okayama Univ. Sci. NO.18 (1983), 17-30.